938. 連續函數ノ Ring 及ビ Vector-lattice ニ就テ

中野　秀五郎（東大）

1940 年ノ Annals ニテ M. Eidelheit ガ次ノ定理ヲ証明シテキル。

定理. compact metric space T ニ於ケル連続函数ノ Ring E ガ unit Element $x(t) \equiv 1$ ヲ含ミ且ツ norm

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シテ closed ナレバ、E ハ或ル compact metric space ニ於ケル総テノ連続函数ノ Ring ト equivalent デアル。

此ノ如キ定理ハヨク知ラレテヰルモノトバカリ思ッテヰタ処、此度ノ Zentralblatt ニテ紹介シテアルノデ意外ニ思ハレタ。然シ未ダ他ノ如何ナル文献ニアルカ私ハ知ラナイノデ、モット拡張シタ然カモ詳シイ形デ証明シテ見タ。

定理 I 或ル bicompact Hausdorff space T ニ於ケル連続函数ノ Ring E ガ unit Element $x(t)\equiv 1$ ヲ含ミ且ツ norm

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シテ complete ナレバ

$$x(t) = x(t_0) \qquad (\text{for all } x(t) \in E)$$

ナルガ如キ t ヲ identify シテ得ル Zerlegungsraum T' ニ於ケル総テノ連続函数ノ Ring ト equivalent デアル。

又、次ノ定理モ同時ニ証明シテ見タ。

定理 II 或ル bicompact Hausdorff space T ニ於ケル連続函数ノ Vector-lattice E ガ unit Element $x(t)\equiv 1$ ヲ含ミ norm

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シテ complete ナレバ、定理 I ト同様ニシテ得ル Zerlegungsraum ニ於ケル総テノ連続函数ノ Vector lattice ト equivalent デアル。

証明ニ先ヅ于次ノ lemma ヲ証明スル。

$\boxed{\text{lemma}}$ bicompact Hausdorff space T ニ於ケル連続函数ノ Modul M ガ unit Element ヲ含ミ, norm

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シ complete, 然カモ T 内ノ任意ノ closed set A, B ニ對シ, AB = 0 ナレバ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ A 閒ニテハ

$$1 \leqq \varphi(t) \leqq 1 + \varepsilon$$

B 内ニテハ

$$0 \leqq \varphi(t) \leqq \varepsilon$$

然カモ T ニテ常ニ

$$0 \leqq \varphi(t) \leqq 1 + \varepsilon$$

ナル連続函数 $\varphi(t)$ ガ常ニ M 内ニ存在スレバ、M ハ T 内ニテ連続ナル総テノ函數ヲ含ム。

証明. $f(x)$ ヲ T ニテ連続ナ任意ノ函数トス。T ガ bicompact Hausdorff space ナルヲ以テ $f(x)$ ハ T ニテ baunded デアル。即チ

$$-m < f(x) < m$$

トス。任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$-m = a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n = m, \quad a_i - a_{i-1} < \varepsilon$$

トス。然ルトキハ假定ニヨリ

$$1 \leqq \varphi_i(x) \leqq 1 + \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } E(x; f(x) \geqq a_i)$$

$$0 \leqq \varphi_i(x) \leqq \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } E(x; f(x) \leqq a_{i-1})$$

$$0 \leqq \varphi_i(x) \leqq 1 + \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } T$$

ナル連續函數 $\varphi_i(x)$ ガM内ニ存在スル。

今 $$\varphi(x) = \sum_{i=2}^{n} \varphi_i(x)(a_i - a_{i-1}) + a_1$$

ト置ケバ $\varphi(x) \in M$ ニシテ、然カモ $x \in E$

$$(x; a_{j-1} \leqq f(x) \leqq a_j)$$

ナル x ニ對シテハ

$$\sum_{i=2}^{j-1}(a_i - a_{i-1}) + a_1 \leqq \varphi(x) \leqq \sum_{i=2}^{j}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right)(a_i - a_{i-1}) + a_1 + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\varepsilon}{m}(a_i - a_{i-1})$$

即チ

$$a_{j-1} \leqq \varphi(x) \leqq a_j + \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon}{m}(a_i - a_{i-1}) \leqq a_j + 2\varepsilon$$

故ニ

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqq a_j - a_{j-1} + 2\varepsilon \leqq 3\varepsilon$$

從ツテ $f(x) \in M$ デナケレバナラヌ（Mハ complete ナルヲ以テナリ。）

$\boxed{\text{定理II ノ證明}}$ Eハ Zerlegungsraum T′ ニテ考フレバ，之ハリ連續函數ノ complete ナ Vector-lattice デ、然カモT′内ノ相異ル x', y' ニ對シテ

$$f(x') \neq f(y')$$

ナル $f(x)$ ガE内ニ存在ス。T′内ニテ

$$f_0(x) = 3\frac{f(x)-f(y')}{f(x')-f(y')} - 1$$

ト置ケバ $f_0(x') = 2,\ f_0(y') = -1$

ナル $f_0(x)$ ガE内ニ存在ス。

A, B ヲ T′ 内ノ任意ノ closed sets, 然カモ $AB = 0$ トス。$x' \in A,\ y' \in B$ ニ對シ

$$f(x') = 2, \quad f(y') = -1$$

ナル $f(x)$ ガE内ニ存在ス。

$$E(x;\ f(x) < 0)$$

ハ open set ニシテ x' ヲ固定シ、y' ヲ B内ニテ変ヘレバ、T ガ bicompact ナルニヨリ此ノトキ open sets ノ有限個ニテ cover サレル。此有限個ニ對スル $f(x)$ ヲ $f_1(x), \cdots\cdots, f_n(x)$ トスレバ

$$f_0(x) = \min_{i=1,2,\cdots,n}\{\mathrm{Max}(f_i(x), 0)\}$$

ナル $f_0(x)$ ハEニ屬シ

$$f_0(x') = 2, \quad f_0(x) = 0 \quad \text{in } B$$

然カモ

$$f_0(x) \geqq 0 \quad \text{in } T'$$

デアル。次ニ此ノ如キ $f_0(x)$ ニ對シ

$$E(x;\ f_0(x) > 1)$$

ナル集合ハ x' ノ Umgebung デアルニヨリ、A ハ此ノ

如キ Umgebung ノ有限個ニテ cover サレル。此ノ有限個ニ対スル函數ヲ $f_0'(x)$, $f_0''(x)$, ----, $f^{(n)}(x)$ トスレバ

$$\varphi(x)=\operatorname*{Max}_{i=1,\cdots,n}\left\{\operatorname{Min}\left(f_0^{(i)}(x),1\right)\right\}$$

ハ E ニ屬シ、然カモ

$$\varphi(x)=1 \text{ in } A, \quad \varphi(x)=0 \text{ in } B,$$
$$0\leqq\varphi(x)\leqq 1 \text{ in } T'$$

デアル。故ニ lemma ニヨリ E ハ T′ ニ於ケル総テノ連續函數ヲ含ム。

$\boxed{\text{定理 I ノ証明}}$ 前ノ証明ニ述ベシ如ク E ハ Zerlegungsraum T′ デ考ヘレバ、ヤハリ連續函數ノ complete ナ Ring デ然カモ T′ 内ノ異ル二点 x', y' ニ對シ

$$f(x')\neq f(y')$$

ナル $f(x)$ ガ E 内ニ存在スル。

$$f_0(x)=3\left(\frac{f(x)-f(y')}{f(x')-f(y')}\right)^2$$

ト置ケバ、$f_0(x)\in E$ ニシテ

$$f_0(x')=3,\quad f_0(y')=0,\quad f_0(x)\geqq 0 \text{ in } T'$$

デアル。今 A, B ヲ T′ 内ノ closed sets デ、然カモ $AB=0$ トスル。$x'\in A$, $y'\in B$ ニ対シ、上ノ如キ函數 $f_0(x)$ ガ E 内ニ存在ス。y' ヲ固定シ x' ヲ A 内デ変ヘル。 $E(x;\ f_0(x)>2)$

ナル集合ハ x' ノ Umgebung デアルカラ、A ハ此ノ如キ Umgebung ノ有限個デ cover サレル。此ノ有限個ニ対スルノヲ $f_1(x), \cdots\cdots, f_n(x)$ トスレバ

$$g(x) = f_1(x) + \cdots\cdots + f_n(x)$$

ハ又 E ニ属シ

$$g(y') = 0, \quad g(x) \geqq 2 \quad in\ A$$

トナル。

$$h(x) = 2 - g(x)$$

トスレバ $h(x) \in E$ ニシテ

$$h(y') = 2, \quad h(x) \leqq 0 \quad in\ A$$

トナル。

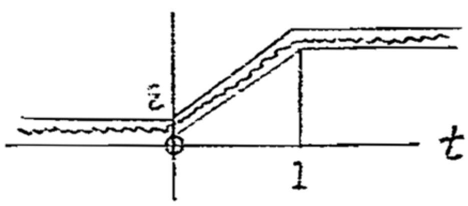
今一変数ノ函數

$$H(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq t \\ t & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 & t \leqq 0 \end{cases}$$

並ニ正数 $m(>1)$, $\varepsilon(<1)$ ニ對シ、Weierstrass ノ定理ニヨリ t ノ Polynomial $G_{m,\varepsilon}(t)$ ニシテ

$$H(t) \leqq G_{m,\varepsilon}(t) \leqq H(t) + \varepsilon \quad in\ (-m, m)$$

ナル $G_{m,\varepsilon}(t)$ ガ存在スル。



備テ前ノ $h(x)$ ニ對シ

$$E(x;\ h(x) > 1)$$

ハ y' ノ Umgebung ナルニヨリ，B ハ此ノ如キ Umgebung ノ有限個デ cover サレル。此ノ有限個ニ對スルノヲ $h_1(x), h_2(x), \cdots\cdots, h_n(x)$ トスル，$h_i(x)$

ハ總テT'ニテ bounded ナルベキニヨリ

$$|h_i(x)| < m \quad \text{in } T'$$

ナルmが存在スル。

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} G_{m,\frac{1}{2n}}(h_i(x))$$

ト置ケバ $\varphi_0(x) \in E$ ニシテ

$$0 \leqq \varphi_0(x) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{in } A$$

$$1 \leqq \varphi_0(x) \quad \text{in } B$$

トナル。$\varphi_0(x)$ハ又T'ニテ bounded ナルベキニヨリ $|\varphi_0(x)| < m'$ in T'ナルm'が存在スル。任意ノ正數εニ對シ

$$\varphi(x) = G_{2m',\varepsilon}(2\varphi_0(x) - 1)$$

ト置ケバ $\varphi(x) \in E$ ニシテ

$$0 \leqq \varphi(x) < \varepsilon \quad \text{in } A$$

$$1 \leqq \varphi(x) \leqq 1+\varepsilon \quad \text{in } B$$

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq 1+\varepsilon \quad \text{in } T'$$

トナル。故ニ lemma ニヨリ EハT'ニ於ケル總テノ連續函數ヲ含ム。

注意 以上ニヨリ證明ハ簡單デハナイが、少シモ困難ナ所ハナイ。唯複雜ナダケデアル。

定理I, IIハ私が Eine Spektraltheorie (數物記事)ニテ無證明ニテ述ベタルモノニシテ、證明スルニ及バズ思ヒタルモ、M. Einheit ノが annals ニ出タルニヨリ、其ノ責任上此處ニ證明スル

コトニシマシタ。

(1941, 6, 21)